

פיזיקה מודרנית

פרק 6 - פורמליזם אלגברי לתורת הקוונטים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים.....1

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:

סיכום כללי:

פונקציות הגל מקיימות את התנאים של מרחב וקטורי.
הכללות:

1. נעבוד עם וקטורים ביותר משלושה מימדים.
2. נעבוד עם סקלרים שיכולים להיות גם מספרים מורכבים.

כתיב דיראק:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{:ket}$$

$$\langle\psi| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots) \quad \text{:bra}$$

מכפלה פנימית - הכללה של מכפלה סקלרית ליותר מ-3 מימדים.

תכונות המכפלה הפנימית:

תכונה 1: $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$ סקלר

תכונה 2: $\langle v|v\rangle \geq 0$ ממשי, אם $\langle v|v\rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

תכונה 3: $\langle v|(\alpha|u\rangle + \beta|k\rangle) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$
הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

נורמה – הכללה של גודל של וקטור ליותר מ-3 מימדים.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

אם המכפלה הפנימית של שני וקטורים מתאפסת אז אומרים שהוקטורים
אורתוגונליים.

מרחב L_2 (או L^2) – מכיל את כל הפונקציות שהאינטגרל על גודל הפונקציה בריבוע

$$\text{אינו מתבדר: } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

בפיזיקה, מרחב פונקציות הגל שנעבוד איתו נקרא מרחב הילברט ובפועל הוא יהיה המרחב L_2 .

* הפונקציות העצמיות של התנע והמיקום אינם ב- L_2 אבל עדיין עובדים איתם.

ייצוג באמצעות בסיס:

בסיס – סט של וקטורים (בלתי תלויים) שבאמצעותם ניתן לבטא כל וקטור אחר במרחב.

בסיס אורתונורמלי – בסיס שבו כל הוקטורים אורתונורמליים.

בסיס אורתונורמלי – בסיס אורתונורמלי שבו הנורמה של כל וקטור היא 1.

הבסיס הסטנדרטי – בסיס שמורכב מוקטורי יחידה.

סט הפונקציות העצמיות (או הו"ע) של כל אופרטור מהוות בסיס*
* יש יוצאי דופן, לדוגמה במקרים שהבסיס אינסופי.

$$\psi(x) = \sum \alpha_n \phi_n(x)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{או}$$

$$\alpha_n = \langle \phi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \psi(x) dx \quad \text{כאשר}$$

המכפלה הפנימית בהצגה באמצעות בסיס אורתונורמלי:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \end{pmatrix} = \sum \alpha_i^* \beta_i$$

שאלות:

(1) ייצוג בסיס לז'נדר

נתונה הפונקציה: $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$.

בתרגיל זה נתרגל פריסה (או ייצוג) באמצעות בסיס פולינומי לז'נדר המנורמל לקטע: $x \in [-1, 1]$.

$$L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, L_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, L_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1), L_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

א. הראו כי ארבעת איברי הבסיס הנ"ל הם אכן אורתונורמלים,

$$\delta_{nm} = \langle L_n | L_m \rangle.$$

ב. מצאו את ארבעת המקדמים ("המשקלים") הראשונים בייצוג של $f(x)$

$$\text{בבסיס לז'נדר. (רמז: } \alpha_n = \langle L_n | f \rangle \text{)}$$

ג. רשמו את הפונקציה לפי ארבעת האיברים הראשונים ושרטטו אותה (באמצעות מחשב) על גבי הפונקציה המקורית.

(2) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = |x_1\rangle$. הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו

$$\text{בקשר: } \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \text{ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.}$$

ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle$. (ממשיים α, β).

מהו החסם על אי הודאות בתנע?

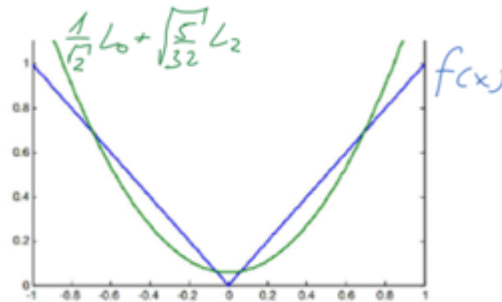
(את אי הודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב- x_1 ?

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. $\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{5}{32}}$

ג. $f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} L_0 + \sqrt{\frac{5}{32}} L_2$



(2) א. $\Delta x = 0, \Delta p = \infty$
ב.

ג. $\langle x \rangle = \alpha\beta |x_1 - x_2|, \langle p \rangle = 0, \langle p^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} p \left[1 + 2\alpha\beta \cos\left(\frac{p(x_1 - x_2)}{\hbar}\right) \right] dp = \infty$
פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

אי שוויון שורץ:

$$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos \theta = \frac{\langle a|b \rangle \langle b|a \rangle}{\sqrt{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle}}$$

אי שוויון המשולש:

$$|(|a\rangle + |b\rangle)| \leq |a| + |b|$$

שאלות:

(1) אי שוויון שורץ

הוכיחו את אי שוויון שורץ: $|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$.
 השתמשו ב- $|c\rangle = |a\rangle - \frac{\langle b|a \rangle}{\langle b|b \rangle} |b\rangle$ ובעובדה שהנורמה של וקטור תמיד גדולה או שווה לאפס $\langle c|c \rangle \geq 0$.

(2) אי שוויון המשולש

הוכיחו את אי שוויון המשולש: $||a\rangle + |b\rangle| \leq |a| + |b|$.
 רמז: השתמשו גם באי שוויון שורץ.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.